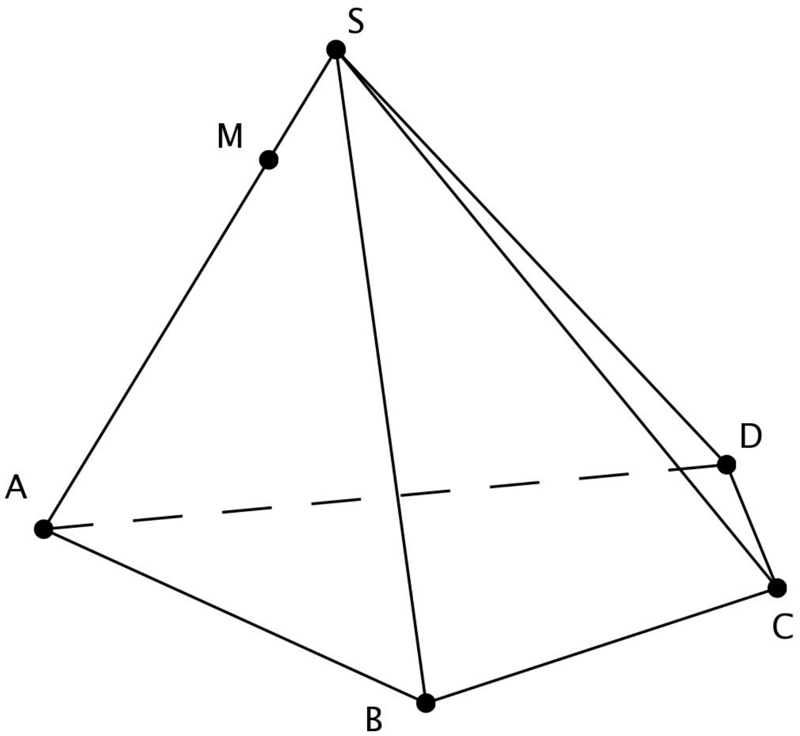
DEVOIR SURVEILLÉ N° 7	
Droites et plans dans l'espace, calcul intégral	***Le 21 mars 2017***

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

<u>Exercice 1</u> (6 *points*)

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. M est un point du segment $[SA]$. Les constructions seront effectuées sur la figure ci-dessous.

1. Justifier que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, puis construire en justifiant la droite d_1, intersection des plans (SAB) et (SDC).
2. Construire en justifiant la droite d_2, intersection des plans (SAD) et (SBC).
3. a) Justifier que les droites d_1 et d_2 définissent un plan que l'on note $\mathcal{P}$.
   b) On appelle $\mathcal{P}'$ le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par M.
   Construire l'intersection du plan $\mathcal{P}'$ avec les plans (SAB), (SBC), (SDC) et (SAD).
   c) On appelle N, P et Q les intersections respectives de $\mathcal{P}'$ avec (SB), (SC) et (SD).
   Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$? Justifier la réponse.



Exercice 2 (3 points)

Déterminer une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I indiqué. On indiquera clairement la forme utilisée pour trouver cette primitive.

1) $f(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2}$; $I = \left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0;+\infty[$.

3) $f(x) = x e^{-x^2+2}$; $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3 (3 points)

Calculer les intégrales suivantes en justifiant.

$$A = \int_0^2 \frac{3t}{t^2-1}\,dt \qquad B = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t \times \sin t\,dt$$

Exercice 4 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+x-2$.

Déterminer les réels dont l'image par f est égale à la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.

Exercice 5 (6 points)

Soient $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

1. Calculer I_0 .
2. Donner une interprétation graphique du nombre I_0 . On fera un graphique pour faire apparaître I_0 .
3. On admet que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
   Calculer I_1 et I_2 .
4. On donne le programme suivant :

Variables
N, X
Initialisation
$0 \to N$
$e - 1 \to X$
Traitement
Tant que $N < 10$ faire
  $(N+1)X - 1 \to X$
  $N + 1 \to N$
FinTantque
Afficher X

a) Que calcule ce programme ?

b) La valeur approchée de I_{10} est égale à $0{,}099$ à 10^{-3} près. Quelle conjecture peut-on faire ?

5. a) Démontrer que pour tout réel x de $[0;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n .
   c) La suite (I_n) est-elle convergente ?