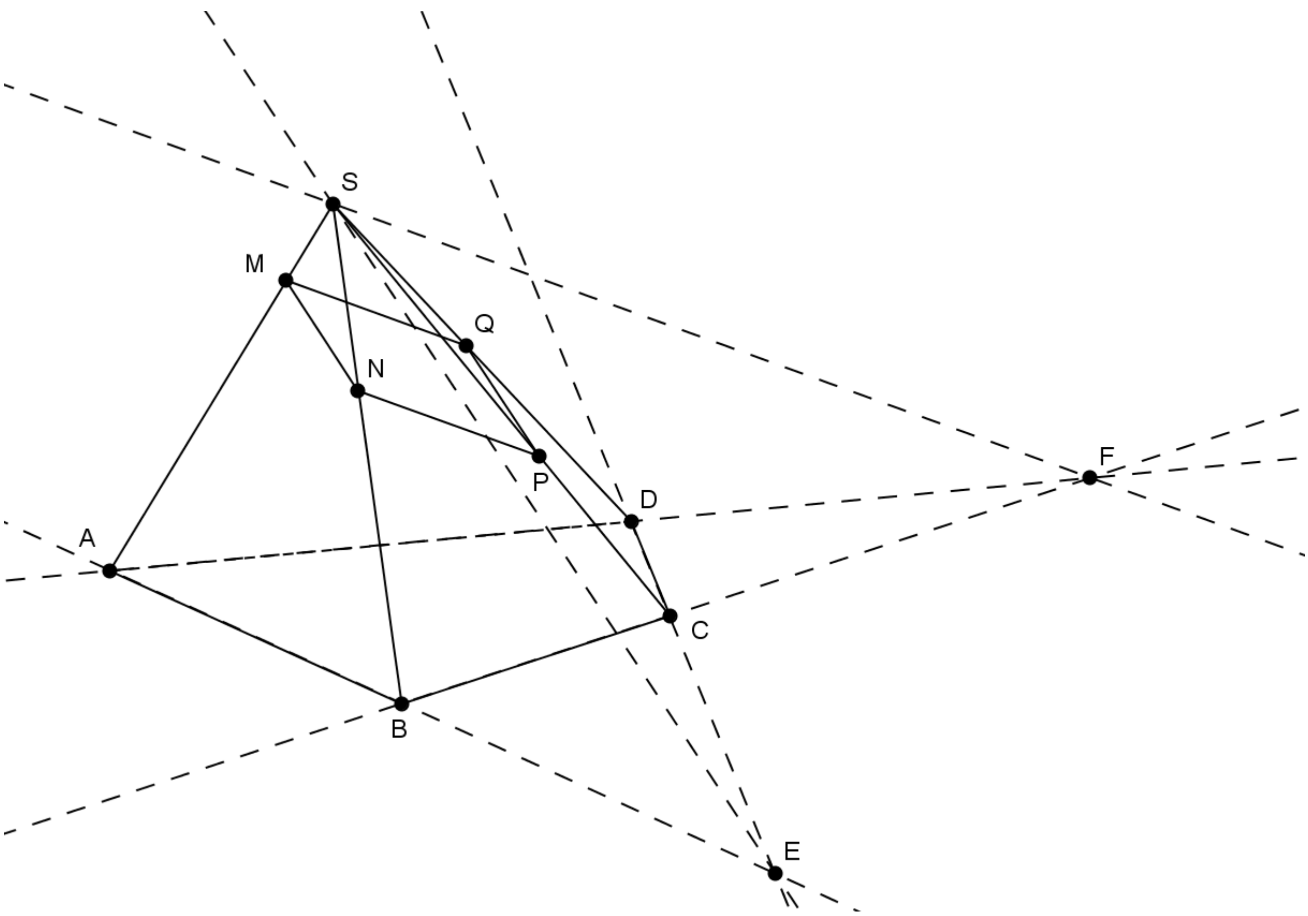
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 7	
Droites et plans dans l'espace, calcul intégral	*Le 21 mars 2017*

Exercice 1

1. Les droites (AB) et (CD) sont dans le plan de de la base $ABCD$ de la pyramide donc elles sont coplanaires. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point E.
   Le point S appartient aux deux plans (SAB) et (SCD) ; or deux plans se coupent suivant une droite. D'où S appartient à d_1.
   Le point E appartient aux droites (AB) et (CD), donc aux plans (SAB) et (SDC).
   Par conséquent, **d_1 est la droite (SE).**
2. Les droites (AD) et (BC) sont dans le plan de de la base $ABCD$ de la pyramide donc elles sont coplanaires. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point F.
   Le point S appartient aux deux plans (SAD) et (SBC) ; or deux plans se coupent suivant une droite. D'où S appartient à d_2.
   Le point F appartient aux droites (AD) et (BC), donc aux plans (SAD) et (SBC).
   Par conséquent, **d_2 est la droite (SF).**
3. a) Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en S donc elles définissent un plan $\mathcal{P}$.
   b) Voir figure (On n'a construit que les segments pour ne pas alourdir la figure).
   c) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans parallèles donc leurs intersections respectives avec le plan (SAB) sont deux droites parallèles. Ceci revient à dire que (MN) et d_1 sont parallèles. Avec le plan (SDC) on montre que (PQ) et d_1 sont parallèles. Donc (MN) et (PQ) sont parallèles. En utilisant les plan (SAD) et (SBC), on trouve de même que (NP) et (MQ) sont parallèles. Par conséquent, ***MNPQ* est un parallélogramme**.



Exercice 2

1) $f(x)=\dfrac{4}{(3x-1)^2}$. Posons $u(x)=3x-1$, alors $u'(x)=3$. Ainsi $1=\dfrac{1}{3}u'(x)$, et, par suite,

$$f(x)=\frac{\frac{4}{3}u'(x)}{u(x)^2}=\frac{4}{3}u'(x)u(x)^{-2} .$$

Par conséquent, $F(x)=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{-2+1}u(x)^{-2+1}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{3x-1}$.

2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Posons $u(x)=\ln x$, alors $u'(x)=\dfrac{1}{x}$. Par suite, $f(x)=u'(x)u(x)$.

Par conséquent, $F(x)=\dfrac{1}{2}u(x)^2=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

3) $f(x)=xe^{-x^2+2}$. Posons $u(x)=-x^2+2$, alors $u'(x)=-2x$. Ainsi $x=-\dfrac{1}{2}u'(x)$, et, par suite,

$f(x)=-\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$. Par conséquent, $F(x)=-\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2+2}$.

Exercice 3

- $A=\displaystyle\int_0^2\frac{3t}{t^2-1}dt$.

  $f(t)=\dfrac{3t}{t^2+1}$. Posons $u(t)=t^2+1$, alors $u(t)=t^2-1$. Ainsi $t=\dfrac{1}{2}u'(t)$, et, par suite,

  $f(t)=\dfrac{\frac{3}{2}u'(t)}{u(t)}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(t)}{u(t)}$. Par conséquent, $F(t)=\dfrac{3}{2}\ln(u(t))=\dfrac{3}{2}\ln(t^2+1)$.

  Donc $A=\dfrac{3}{2}\ln(4+1)-\dfrac{3}{2}\ln(0+1)=\dfrac{3}{2}\ln 5$.
- $B=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\times\sin t\,dt$

  $f(t)=\cos t\times\sin t$. Posons $u(t)=\sin t$, alors $u'(t)=\cos t$. Ainsi, $f(t)=u'(t)u(t)$.

  Par conséquent, $F(t)=\dfrac{1}{2}(u(t))^2=\dfrac{1}{2}(\sin t)^2$.

  Donc, $B=\left[\dfrac{1}{2}(\sin t)^2\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$.

Exercice 4

La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est égale à :

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-0=\frac{1}{3} .$$

Résolvons alors l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire $x^2+x-\dfrac{7}{3}=0$.

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times-\dfrac{7}{3}=\dfrac{31}{3}$.

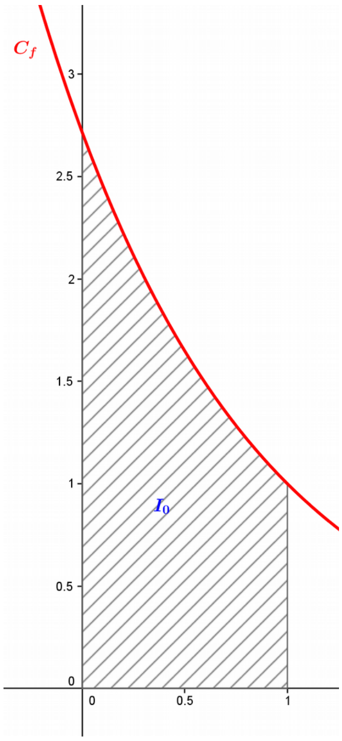
Comme $\Delta>0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}\approx-2{,}11 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}\approx1{,}11 .$$

Or $x_1\notin[0;2]$ et $x_2\in[0;2]$.

Par conséquent, $\dfrac{-1+\sqrt{\dfrac{31}{3}}}{2}$ est le réel dont l'image par f est égale à la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.

<u>Exercice 5</u>



1. $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx$.
   Posons $u(x) = 1-x$, alors $u'(x) = -1$. Ainsi $e^{1-x} = -u'(x)e^{u(x)}$.
   Par conséquent,
   $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = (-e^0)-(-e^1) = e-1$.
2. **I_0 est l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.**
3. Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
   - $I_1 = I_{0+1} = (0+1)I_0 - 1 = I_0 - 1 = e-1-1 = e-2$.
   - $I_2 = I_{1+1} = (1+1)I_1 - 1 = 2I_1 - 1 = 2(e-2)-1 = 2e-5$.
4. a) Le programme calcule I_{10}.
   b) Il semble que la suite (I_n) converge vers 0.
5. a) Si $0 \le x \le 1$ alors $1-0 \ge 1-x \ge 1-1$ car la fonction $x \to 1-x$ est strictement décroissante sur $[0;1]$.
   Par suite, $0 \le 1-x \le 1$. Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où $1 \le e^{1-x} \le e$.
   De plus $x^n \ge 0$ pour tout x de $[0;1]$; par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :**
   $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$.
   b) D'après la question précédente, et comme les fonctions $x \to x^n$, $x \to e\,x^n$ et $x \to x^n e^{1-x}$ sont continues sur $[0;1]$, on en déduit que : $\int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \le \int_0^1 x^n e\,dx$, c'est-à-dire $\int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \le e\int_0^1 x^n\,dx$.
   Or $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$; par suite, $\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$.
   c) D'après la question précédente, et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.