Corrigé de l'évaluation n°1

Partie A

1. $g(x) = -4x^3+3x^2-2 = x^3(-4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3})$.

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} -4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^3} = -4+0+0 = -4$, donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

   On a $g'(x) = -4\times3x^2+3\times2x = -12x^2+6x = 6x(-2x+1)$. On a donc

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x$		-	0	+	0	+	
$-2x+1$		+		+		-	
$f'(x)$		-		+		-	
$u(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$-\frac{7}{4}$	↘	$-\infty$

2. a. Sur $]-\infty;0[$, la fonction f est continue et strictement décroissante, de plus son intervalle image est $]-2;+\infty[$ qui contient 0, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty;0[$.
   Sur $[0;+\infty[$, le maximum de la fonction f est $-\frac{7}{4}$ donc $f(x) < 0$ sur $[0;+\infty[$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$.
   b. A l'aide de la calculatrice, on obtient $f(-0{,}61) \approx 0{,}024$ et $f(-0{,}6) = -0{,}056$ donc $-0{,}61 < \alpha < -0{,}6$. (Et ces deux valeurs sont donc des valeurs approchées à 10^{-2} près de α)
   c. Comme la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, et que $g(\alpha) = 0$, g est positive sur $]-\infty;\alpha[$ et négative sur $]\alpha;+\infty[$ (g est négative sur $[0;+\infty[$).

Partie B

1. a. $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-1} = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} = \frac{2-\frac{1}{x}}{x^2(1-\frac{1}{x^3})}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$,

   $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   La fonction cube est croissante, donc si $x < 1$, alors $x^3-1 < 0$ et si $x > 1$, alors $x^3-1 > 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^3-1=0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^3-1=0^+$. Comme $\lim\limits_{x\to1} 2x-1=2-1=1$ on a alors, par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

c. $f'(x)=\dfrac{2(x^3-1)-3x^2(2x-1)}{(x^3-1)^2}=\dfrac{2x^3-2-6x^3+3x^2}{(x^3-1)^2}=\dfrac{-4x^3+3x^2-2}{(x^3-1)^2}=\dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$.

d. pour tout $x\neq1$, $(x^3-1)^2>0$ donc f' est du signe de g et on a :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

2. a. $f(0)=1$ et $f'(0)=-2$ donc l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est $y=-2x+1$

b. Il s'agit d'étudier le signe de la différence $f(x)-(-2x+1)$.

$$f(x)-(-2x+1)=\frac{2x-1}{x^3-1}+2x-1=\frac{2x-1+(x^3-1)(2x-1)}{x^3-1}=\frac{(2x-1)(x^3-1+1)}{x^3-1}=\frac{x^3(2x-1)}{x^3-1}$$

On a alors :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$-\infty$
x^3		-	0	+		+		+	
$2x-1$		-		-	0	+		+	
x^3-1		-		-		-	0	+	
$f(x)-(-2x+1)$		-		+		-	‖	+	

La courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0 sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ (c'est à peine visible) et sur $]1;+\infty[$. elle est en dessous sur $]-\infty;0[$ et sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$

3.